

۱. یک محصول از مونتاژ ۳ قطعه A و  $\frac{1}{2}$  قطعه B و ۲ قطعه C ساخته می شود. در صورتیکه هدف مقدار تولید این محصول و  $x_A$  و  $x_B$  و  $x_C$  مقادیر تولید این قطعات باشند و حداکثر اختلاف دو قطعه A و B، 10 واحد باشد و تعداد تولید قطعه B حداکثر دو برابر قطع C باشد. مدل این مساله کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Max} z &= \text{Min} \left\{ 3x_A, \frac{x_B}{2}, 2x_C \right\} & (2) \quad \text{Min} z &= \text{Max} \left\{ 3x_A, \frac{x_B}{2}, 2x_C \right\} & (1) \\ x_A - x_B &= 10 & |x_A - x_B| &\leq 10 \\ x_B - 2x_C &\geq 0 & x_B - 2x_C &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min} z &= \text{Max} \left\{ \frac{x_A}{3}, 2x_B, \frac{x_C}{2} \right\} & (4) \quad \text{Max} z &= \text{Min} \left\{ \frac{x_A}{3}, 2x_B, \frac{x_C}{2} \right\} & (3) \\ -10 \leq x_A - x_B &\leq 10 & -10 \leq x_A - x_B &\leq 10 \\ x_B - 2x_C &\leq 0 & x_B - 2x_C &\leq 0 \end{aligned}$$

۲. قطعه ای به طول 1/5 متر موجود است. می خواهیم قطعاتی به طول های 30، 40 و 60 سانتی متر از این قطعه ببریم. اگر تقاضای قطعات مزبور به ترتیب 80، 75 و 105 باشد، در این صورت، این مساله با هدف حداقل نمودن ضایعات دارای:

(۱) ۸ متغیر و ۳ محدودیت است.

(۲) ۷ متغیر و ۳ محدودیت است.

(۳) ۷ متغیر و ۴ محدودیت است.

(۴) ۶ متغیر و ۳ محدودیت است.

۳. در برنامه ریزی خطی، تابع هدف  $\text{Min} = \text{Max}(4x - 3, 3x)$  را معادل با کدامیک از عبارات زیر می توان نوشت؟

$$\text{Max} z = \{7x - 1\} \quad (1) \quad z = 3x, z = 4x - 3 \quad (2)$$

$$(3) \text{ به ازای } 4x - y \leq 3, 3x - y \leq 0, z = y \quad (4) \text{ به ازای } 4x - y \geq 3, 3x - y \geq 0, z = y$$

۴. چنانچه محدودیت  $x_1 + 2x_2 = 30$  ظرفیت زمان کار ماشین آلات را نشان دهد و هزینه هر ساعت بیکاری ماشین ۴۰ و هزینه هر ساعت اضافه کاری ۶۰ واحد پول باشد کدام گزینه معرف اطلاعات فوق است؟

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 40s_1 + 60s_2 & \text{Min } z &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t : } x_1 + 2x_2 + s_1 - s_2 &= 30 & \text{s.t : } x_1 + 2x_2 + s &= 30 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 40s_1 + 60s_2 & \text{Min } z &= 40s_1 + 60s_2 \\ \text{s.t : } x_1 + 2x_2 + s_1 + s_2 &= 30 & \text{s.t : } x_1 + 2x_2 + s_1 + s_2 &= 30 \end{aligned} \quad (3)$$

(۴) هیچکدام

۵. عبارت  $\text{Max}\{t_1, t_2\} \leq t_3 + 60$  در یک مساله زمانبندی ترمینال اتوبوسرانی، بیانگر اینست که:

- (۱) اتوبوسهای ۱ و ۲ حداکثر ۶۰ دقیقه فرصت دارند تا بعد از اتوبوس سوم وارد ترمینال شوند.
- (۲) اتوبوسهای ۱ و ۲ حداکثر ۶۰ دقیقه فرصت دارند تا قبل از اتوبوس سوم وارد ترمینال شوند.
- (۳) اتوبوسهای ۱ و ۲ حداقل ۶۰ دقیقه فرصت دارند تا بعد از اتوبوس سوم وارد ترمینال شوند.
- (۴) اتوبوسهای ۱ و ۲ حداقل ۶۰ دقیقه فرصت دارند تا قبل از اتوبوس سوم وارد ترمینال شوند.

۶. با توجه به برنامه ریزی خطی زیر، مساله دارای چه حالت خاصی است؟

$$\max z = 2x_1 - x_2$$

$$|x_1 + x_2| \leq 4$$

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 5$$

$$x_1, x_2 = \text{آزاد در علامت}$$

(۲) بهینه چندگانه

(۱) تبهگن

(۴) عدم وجود جواب شدنی

(۳) بدون حالت خاص

۷. مساله LP ذیل را در نظر بگیرید.  $\text{Max } C^t \cdot x \quad \text{st. } AX = b$

می دانیم که بازای بردارهای  $\alpha$  و  $\beta$  و روابط  $A\alpha = b$  و  $A\beta = 0$  و  $\beta \neq 0$  و  $C^t\beta \neq 0$  برقرارند. در این شرایط می توان گفت:

(۱) مساله جواب بهینه محدود دارد. (۲) مساله نشدنی است.

(۳) مساله جواب بی کران دارد. (۴) مساله موجه است.

۸. بزرگتر شدن فضای جواب یک مساله برنامه ریزی خطی:

(۱) همواره تابع هدف بهتری را عاید می سازد.

(۲) در صورتی که تابع هدف از نوع بیشینه سازی باشد، ممکن است تابع هدف بهتری را عاید سازد.

(۳) در صورتی که تابع هدف از نوع کمینه سازی باشد، ممکن است تابع هدف بهتری را عاید سازد.

(۴) در هرشرایطی، به بدتر شدن تابع هدف نمی انجامد.

۹. دوگان مساله ذیل کدام گزینه است؟

$$\text{Max } x_1 + x_2 \quad \text{s.t. } |x_1 - x_2| \leq 2 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } 2y_1 + 2y_2 \quad \text{s.t. } |y_1 - y_2| \leq 1 \quad y_1, y_2 \geq 0 \quad (۱)$$

$$\text{Min } y_1 + y_2 \quad \text{s.t. } |y_1 - y_2| \leq \frac{1}{2} \quad y_1, y_2 \geq 0 \quad (۲)$$

$$\text{Min } 2y_1 + 2y_2 \quad \text{s.t. } |y_1 - y_2| \geq 1 \quad y_1, y_2 \geq 0 \quad (۳)$$

$$\text{Min } y_1 + y_2 \quad \text{s.t. } |y_1 - y_2| \geq \frac{1}{3} \quad y_1, y_2 \geq 0 \quad (۴)$$

۱۰. دو پایه متناظر از مسائل LP اولیه  $\{P: \text{Min}\}$  و ثانویه  $\{D: \text{Max}\}$  را در نظر بگیرید. به طوری که پایه P غیر عملی نابهینه باشد در این صورت: (Z مقدار توابع هدف)

$$z_p \leq z_D \quad (۱) \quad z_p < z_D \quad (۲) \quad z_p \geq z_D \quad (۳) \quad z_p > z_D \quad (۴)$$

۱۱. در مساله برنامه‌ریزی خطی ذیل، به ازای پایه  $(x_2, s_1)$ ، مقدار نسبت  $\frac{y_1-1}{y_2}$  در مساله همزاد چقدر است؟

(Y: متغیرهای تصمیم مساله همزاد)

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2x_1 + 6x_2 \\ & 4x_1 + 6x_2 \leq b_1 \\ & x_1 - x_2 \leq b_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

۱۲- با توجه به مساله LP ذیل، بدترین مقدار Z در چه شرایطی حادث می‌گردد؟

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 2x_1 + ax_2 \\ \text{s.t:} \quad & bx_1 + \frac{2}{3}x_2 \leq c \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & 1 \leq a \leq 4, a \leq c \leq b \leq 6 \end{aligned}$$

$$a=4, b=4, c=4 \quad (۴)$$

$$a=4, b=6, c=4 \quad (۳)$$

$$a=1, b=1, c=1 \quad (۲)$$

$$a=1, b=6, c=1 \quad (۱)$$

۱۳- مساله LP زیر را که متغیرهای آن دارای کران بالا و پایین می‌باشد در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & w = cx \\ \text{s.t:} \quad & Ax = b \\ & L \leq x \leq U, 0 \leq L \leq U \end{aligned}$$

اگر این مساله دارای فضای حل باشد:

(۱) این مساله و دوال آن هر دو دارای جواب بهینه‌اند.

(۲) این مساله و دوال آن ممکن است بیکران شوند.

(۳) این مساله و دوال آن هر دو دارای فضای حل محدود می‌باشند.

(۴) این مساله و دوال آن ممکن است غیر قابل قبول باشند.

۱۴- مزدوج مساله ذیل:

$$\max f(x)$$

st.

$$g(x) = k$$

$$g(x) = k + 1$$

(۴) نشدنی است.

(۳) کراندار نیست.

(۲) کراندار است.

(۱) بیکران است.

۱۵- برای کراندر (Bounded) بودن مساله Lp ذیل، کدام مورد قابل قبول است؟

$$\text{Min } ax_1 + 20x_2$$

$$\text{st. } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 7 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \text{ and } x_2 \leq 0$$

$$a \leq 20 \text{ (۴)}$$

$$a \geq 20 \text{ (۳)}$$

$$a > 0 \text{ (۲)}$$

$$a \geq 0 \text{ (۱)}$$

۱۶- مسئله برنامه‌ریزی خطی  $\text{Min } \{Cx : Ax = b, x \geq 0\}$  را در نظر بگیرید و فرض کنید که دارای جواب بهینه است. این مسئله یک بار توسط روش سیمپلکس و یک بار توسط روش سیمپلکس دوگان حل شده است. هر جدول سیمپلکس مقداری به تابع هدف مسئله می‌دهد که آن را با  $Z$  نشان می‌دهیم و هر جدول سیمپلکس دوگان نیز مقداری به تابع هدف می‌دهد که آن را با  $Z'$  می‌نامیم. ارتباط بین  $Z, Z'$  برای هر جفت جدول کدام است؟

$$Z \neq Z' \text{ (۴)}$$

$$Z \leq Z' \text{ (۳)}$$

$$Z = Z' \text{ (۲)}$$

$$Z \geq Z' \text{ (۱)}$$

### پاسخنامه تشریحی

۱. گزینه ۴ صحیح است.

اگر  $x_A$ ،  $x_B$  و  $x_C$  تعداد تولید ۳ قطعه A و B و C باشند، می توان با آن ها به ترتیب  $\frac{x_A}{3}$  و  $2x_B$  و  $\frac{x_C}{2}$  محصول نهایی تولید نمود، داریم:

$$\text{Max} z = \text{Min} \left\{ \frac{x_A}{3}, 2x_B, \frac{x_C}{2} \right\}$$

$$-10 \leq x_A - x_B \leq 10$$

$$x_B - 2x_C \leq 0$$

۲. گزینه ۱ صحیح است.

عرض قطعات \	1	2	3	4	5	6	7	8	درخواست
30	5	3	3	2	1	1	1	0	80
40	0	1	0	2	3	0	1	2	75
60	0	0	1	0	0	2	1	1	105
ضایعات	0	20	0	10	0	0	20	10	

$x_i$  تعداد قطعاتی که به شیوه  $i$ ام برش داده می شود. ( $i = 1, 2, \dots, 8$ )

مسأله دارای ۸ متغیر و ۳ محدودیت است.

۳. گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{Min} z = y$$

$$4x - 3 \leq y \rightarrow 4x - y \leq 3$$

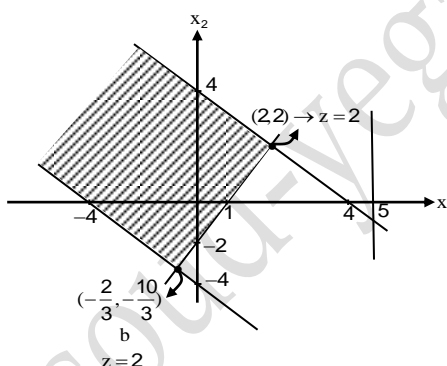
$$3x \leq y \rightarrow 3x - y \leq 0$$

۴. گزینه ۲ صحیح است.

تابع هدف معرف هزینه می‌باشد و جمع کل هزینه را حداقل می‌کند.  $s_1$  در محدودیت معرف زمان بیکاری ماشین و  $s_2$  در محدودیت معرف اضافه کاری ماشین است.

به چرایی گزینه ۲ فکر کنید!!! ( بحث خواهیم کرد!!! )

۵. گزینه ۱ صحیح است.



۶. گزینه ۲ صحیح است.

محدودیت دوم موازی تابع هدف و از طرفی محدودیتی الزام‌آور است و در نتیجه مسأله دارای حالت خاص چندگانگی است.

۷. گزینه ۳ صحیح است.

به دلیل  $A\alpha = b$ ، سیستم لزوماً جواب دارد و به دلیل  $A\beta = 0$  و  $\beta \neq 0$ ، سیستم  $AX = b$  دارای جواب بیکران است. از طرفی چون  $C'\beta \neq 0$  است جواب مسأله بیکران خواهد شد.

۸. گزینه ۴ صحیح است.

تابع هدف ممکن است بهتر شود یا اینکه مساوی بماند.

۹. گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Min } 2y_1 + 2y_2 \\ y_1 - y_2 \geq 1 \\ -y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

۱۰. گزینه ۴ صحیح است.

فرض کنید  $z_0$  مقدار بهینه تابع هدف باشد. هر دو پایه، غیر عملی نابینه هستند.

$$\begin{array}{l} z_p > z_0 \\ z_D < z_0 \end{array} \rightarrow z_p > z_D$$

۱۱. گزینه ۴ صحیح است.

$x_2$  پایه ای  $\Rightarrow$   $L_2$  غیر پایه ای

$$\rightarrow 6y_1 - y_2 = 6 \rightarrow 6(y_1 - 1) = y_2 \rightarrow \frac{y_1 - 1}{y_2} = \frac{1}{6}$$

$y_1$  غیر پایه ای  $\Rightarrow$   $s_1$  پایه ای

۱۲. گزینه ۱ صحیح است.

$a$  کمترین مقدار،  $b$  بیشترین مقدار،  $c$  کمترین مقدار

۱۳. گزینه ۱ صحیح است.

از آنجائی که متغیرهای مساله اولیه از بالا و پایین محدود هستند لذا تابع هدف هیچگاه بیکران نمی گردد و مساله اولیه دارای جواب بهینه می باشد بنابراین دوال آن هم بیکران نخواهد شد و دارای جواب بهینه می باشد.



۱۴. گزینه ۳ صحیح است.

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = k \\ g(x) = k+1 \end{array} \right\} \Rightarrow k = k+1 \Rightarrow 0=1 \rightarrow \text{نشدنی}$$

مزدوج یک مساله ی نشدنی، بیکران یا نشدنی است.

۱۵. گزینه ۳ صحیح است.

با نوشتن همزاد مساله:

$$\max 6y_1 + 7y_2$$

st.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_2 \leq a \\ y_1 + y_2 \geq 20 \end{array} \right\} \Rightarrow a \geq y_1 + y_2 \geq 20 \Rightarrow a \geq 20$$

برای عملی ماندن

$$y_1, y_2 \geq 0$$

۱۶. گزینه ۱ صحیح است.

طبق قضیه دوگان، هر جواب مسئله max یک کران پایین برای مسئله min است لذا  $Z \geq Z'$

مسعود یگانه